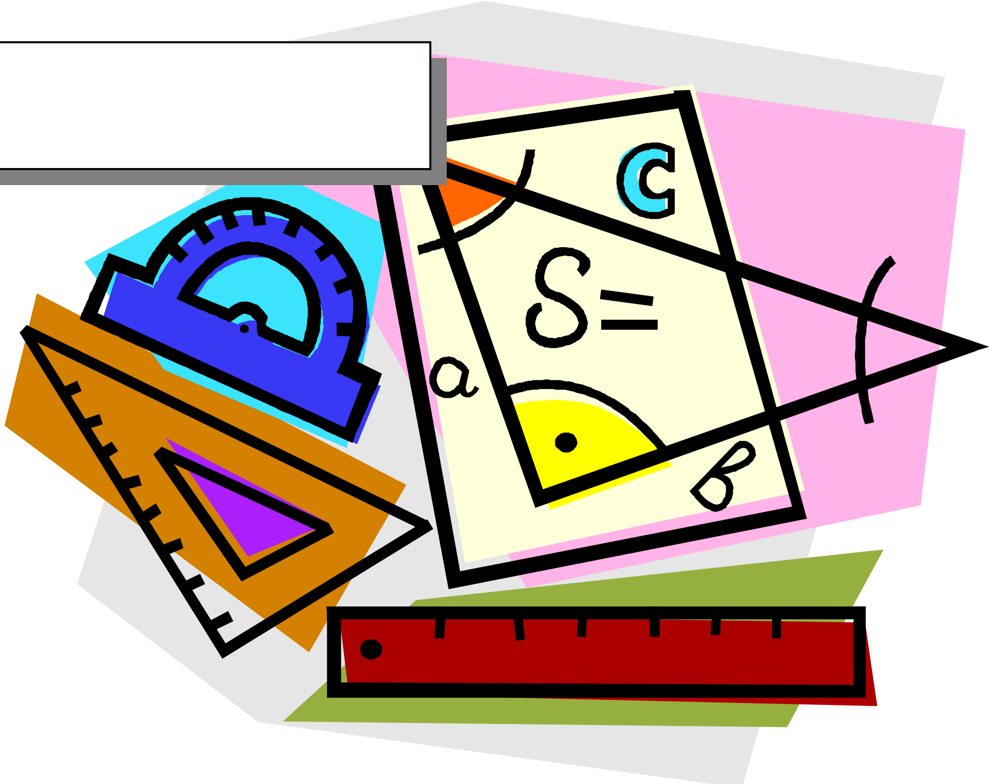
Geometrie-Dossier
Der Kreis 1

Name:

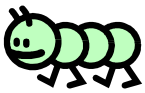


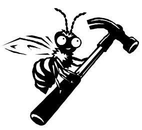
Inhalt:

- **Berechnungen in Kreis und Kreissektoren (Bogenlängen, Umfang, Durchmesser, Fläche)**
- **Der gerade Kreiszylinder (Oberfläche, Mantel und Volumen)**

Verwendung:

Dieses Geometriedossier orientiert sich am Unterricht und liefert eine Theorie-Zusammenfassung. Bei Konstruktionen sind natürlich viele Wege möglich, hier wurde als Musterlösung jeweils ein möglichst einfacher Weg gewählt.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

Die <u>Aufgaben müssen in der Freizeit</u> (oder in der Hausaufgabenstunde) <u>gelöst werden</u>. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden. Fragen dürfen natürlich auch immer gestellt werden.

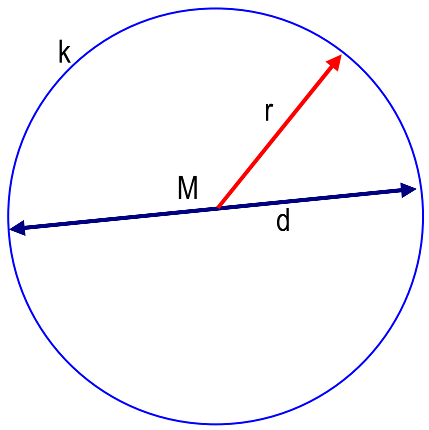
Achtung: Konstruktionen unbedingt mit Zirkel, Massstab, gespitztem Bleistift durchführen. Feine Striche verwenden!

Beachten:	*Konstruktionen:*	*Lösungen rot (weitere Lösungen in ähnlichen Farben, orange, gelb, etc.)*
	Skizzen:	*Gegebenes GRÜN, Gesuchtes ROT. Rest Bleistift oder schwarzer Fineliner.*
	Sichtbarkeit:	*In Raumbildern alle nicht sichtbare Kanten gestrichelt darstellen.*

1. Der Kreis

1.1 Kreis

Zur Erinnerung die „Teile“ eines Kreises:



k: Kreislinie

M: Kreismittelpunkt

r: Kreisradius

d: Kreisdurchmesser (= 2 • Kreisradius)

1.2 Kreisumfang (Länge der Kreislinie)

Der Umfang eines Polygones (Vieleckes) ist einfach zu berechnen. Man addiert alle Seiten und die Summe ist dann der Umfang der Figur. Im Falle des Kreises ist dies nicht ganz so einfach, denn es gibt ja keine einzelnen Seiten. So haben zahlreiche Denker und Mathematiker schon vor langen Zeiten gerechnet, gemessen und geforscht. Wir können das auch tun. Wenn wir einen Kreis zeichnen und dann den Umfang mit Hilfe einer Schnur bestimmen, dann können wir einen Zusammenhang zwischen Radius, Durchmesser und Umfang finden:

Kreisdurchmesser	10 cm	7	6	5cm
Kreisumfang (gemessen)	31.4 cm	22 cm	18.8 cm	15.7 cm

Doch welchen Zusammenhang finden wir?

Die Zahlen (Kreisdurchmesser zu Kreisumfang) verhalten sich proportional, der Proportionalitätsfaktor beträgt hier ca. 3.14. Und genau diese Gesetzmässigkeit haben sich die alten Griechen schon zu Nutze gemacht und haben deshalb die Konstante (Feste Zahl) mit dem Namen π (gesprochen: Pi) eingeführt. Dabei gilt:

Die Kreiszahl π (Pi) beträgt ungefähr 3.141592654. Normalerweise wird sie aber als π stehen gelassen. In einigen Fällen verwendet man für π auch den Näherungswert $\frac{22}{7}$

Die Formeln für den Kreisumfang sind somit: $u_{Kreis} = \pi \bullet \text{Durchmesser} = \pi \bullet 2 \bullet \text{Radius}$

$$\boxed{u_{Kreis} = d \bullet \pi \quad = 2 \bullet r \bullet \pi \qquad \text{oder kurz:} \qquad u_{Kreis} = d\,\pi \; = \; 2\,\pi\,r}$$

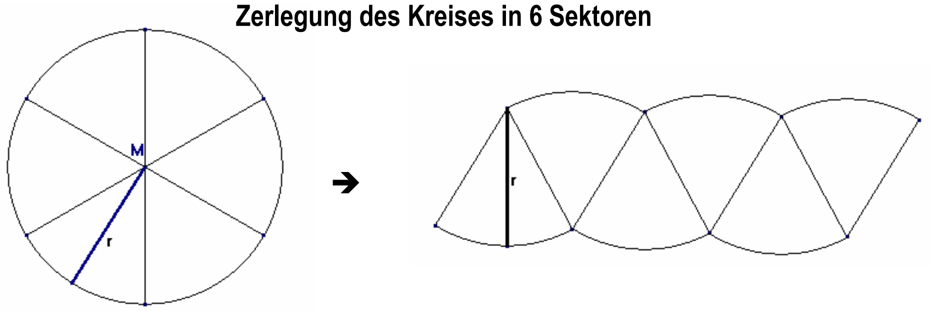
Fragen / Bemerkungen:

1.3 Kreisfläche

Durch die Einführung der Kreiszahl π sind wir nun in der Lage, die Fläche des Kreises zu berechnen. Dieser Berechnung liegt eine einfache Überlegung zu Grunde: Die Fläche eines Rechteckes, die durch Länge • Breite ganz leicht zu berechnen ist. Wenn es nun also gelingt, einen Kreis in ein Rechteck „umzubauen“, dann können wir die Fläche des Kreises nachher berechnen.

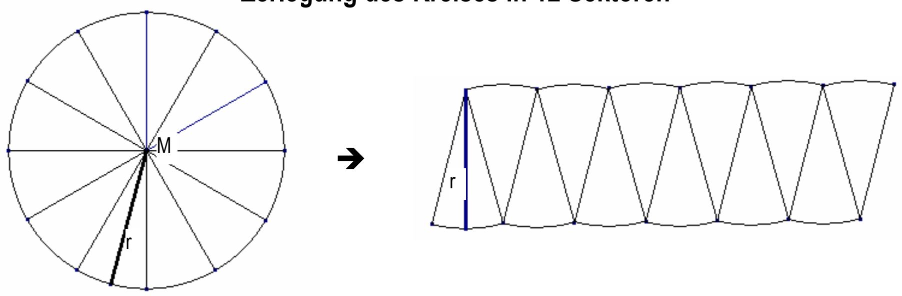
Mit der dargestellten Zerlegung des Kreises in ganz kleine Abschnitte (Kreissektoren) kann dies näherungsweise gezeigt werden:

Zerlegung des Kreises in 6 Sektoren



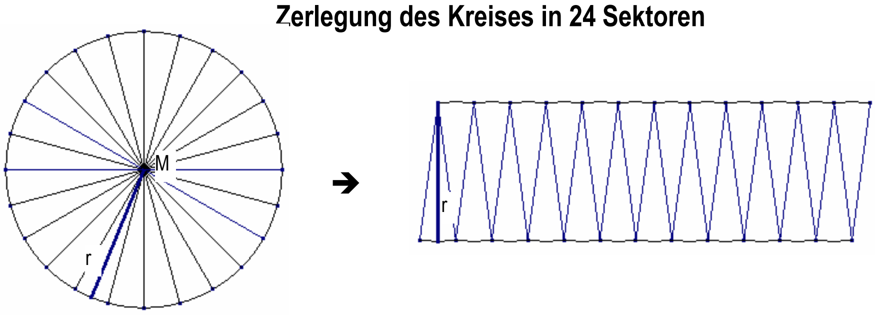
$u = 2\,r\,\pi$

Zerlegung des Kreises in 12 Sektoren



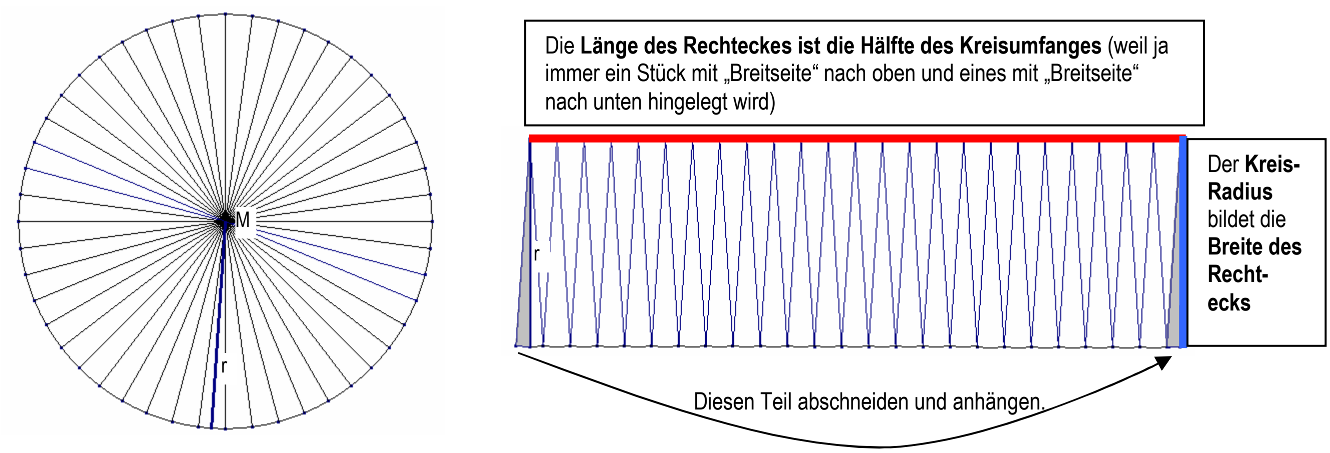
$u = 2\,r\,\pi$

Zerlegung des Kreises in 24 Sektoren



$u = 2\,r\,\pi$

Je kleiner die Abschnitte gewählt werden, desto besser können wir ein Rechteck legen. Wenn wir also die Abschnitte super-super-superklein wählen, hätten wir praktisch ein perfektes Rechteck. Mit einer weiteren Zerlegung des Kreises in 48 Sektoren können wir aber auch schon sehen, wie sich das nachher präsentiert:



Somit lässt sich die Fläche des Rechteckes (und damit des Kreises) berechnen:

A_{Kreis} = Länge • Breite

= Hälfte des Kreisumfangs • Kreisradius

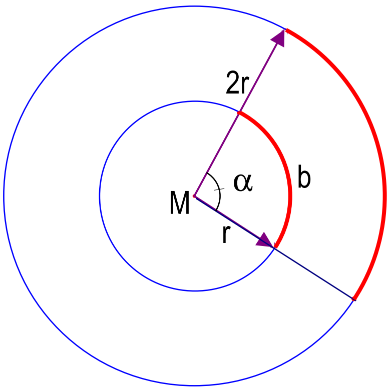
$= \frac{u}{2} \bullet r$ ➔ $\frac{u}{2} = r \bullet \pi$, weil ja $u = 2\,\pi\, r$

$= \mathbf{r \bullet \pi} \bullet \mathbf{r}$

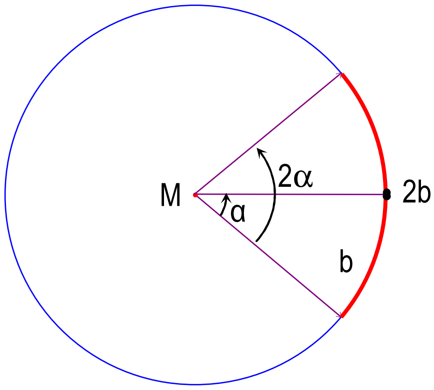
$$\boxed{\mathbf{A_{Kreis} = r^2\,\pi}}$$

1.4 Fläche und Bogenlänge bei Kreissektoren

Hin und wieder ist es wichtig, nicht ganze Kreise, sondern Sektoren von Kreisen zu berechnen. Für die Berechnung der Kreissektoren können wir uns auf eine mathematische Betrachtung festlegen: Die Proportionalität. Wenn man nämlich genau hinschaut, stellt man fest:



b: Bogenlänge
r: Kreisradius
α: Zentriwinkel



Denkfigur 1:
Zusammenhang zwischen dem Radius r und dem Kreisbogen b:

- je grösser der Radius, desto grösser die Bogenlänge.
- zum doppelten Radius (2r) gehört die doppelte Bogenlänge (2b).

Denkfigur 2:
Zusammenhang zwischen dem Zentriwinkel ∝ und dem Kreisbogen b:

- je grösser der Zentriwinkel, desto grösser die Bogenlänge.
- zum doppelten Zentriwinkel (2a) gehört die doppelte Bogenlänge (2b).

Die Bogenlänge ist proportional zum Radius und proportional und Grösse des Zentriwinkels. Das Gleiche gilt für die Sektor-Fläche.

Proportionalitätsansatz: $\mathbf{2\pi r}$ ——— $\mathbf{360°}$ $\mathbf{r^2\pi}$ ——— $\mathbf{360°}$

$\mathbf{b}$ ——— α $\mathbf{A}$ ——— α

Somit: $\boxed{\mathbf{b = \frac{2\,\pi\, r \bullet \alpha}{360°}}}$ $\boxed{\mathbf{A_{Sektor} = \frac{\alpha \bullet \pi r^2}{360°} = \frac{b \bullet r}{2}}}$

Die gefundene Formel bedeutet jetzt also nichts anderes, als dass sich die Länge des Kreisbogens berechnen lässt als Quotient aus dem Produkt von Kreisumfang und Zentriwinkel und dem vollen Winkel (360°). Anders gesagt: Der Bruchteil des vollen Kreises (Zentriwinkel geteilt durch 360°) mal dem Kreisumfang. Genau gleich gilt das für die Kreissektor-Fläche: Zentriwinkel geteilt durch 360° mal Kreisfläche.

Aufgaben Kreis 1:

1. **Berechne den Umfang und die Fläche eines Kreises mit:**

a)	r = 15 cm	$u_{Kreis}=$	$A_{Kreis}=$
b)	d = 5.6 cm	$u_{Kreis}=$	$A_{Kreis}=$
c)	r = 99 cm	$u_{Kreis}=$	$A_{Kreis}=$
d)	r = 12x	$u_{Kreis}=$	$A_{Kreis}=$
e)	d= 13m	$u_{Kreis}=$	$A_{Kreis}=$

2. **Berechne den Durchmesser des Kreises mit:**

a)	$u_{Kreis}=$ 183.89 cm	d=
b)	$u_{Kreis}=$ 15.67 cm	d =
c)	$u_{Kreis}= 35\pi x$	d =
d)	$A_{Kreis}=$ 1683 m^2	d =
e)	$A_{Kreis}= 685\frac{1}{3}\ cm^2$	d =
f)	$A_{Kreis}= 684x^2\pi$	d =

3. **Berechne den Radius des Kreises mit:**

a)	$u_{Kreis}=$ 83.89 cm	r=
b)	$u_{Kreis}=$ 5.67 cm	r =
c)	$u_{Kreis}= 355\pi x$	r =
d)	$A_{Kreis}=$ 163 m^2	r =
e)	$A_{Kreis}= 68\frac{1}{3}\ cm^2$	r =
f)	$A_{Kreis}= 64x^2\pi$	r =

4. **Berechne die Fläche eines Kreises mit dem Umfang u = 2568cm**

5. **Berechne den Umfang eines Kreises mit der Fläche A = 2682 cm^2**

6. **Peter und Marili, zwei herzige kleine Kindergartenfreunde, spielen mit ihren Freunden „Lueged nöd ume, dä Fuchs gaht ume“. Dies begeistert die beiden sehr. Jakob, der grosser Bruder von Marili möchte nun herausfinden, welche Strecke die Beiden zurückgelegt haben (sie sind natürlich schön brav auf einem Kreis gerannt, dessen Radius 3.2 m misst).**
   a. Wie weit ist Marili gerannt, wenn du weisst, dass sie 15 Runden zurückgelegt hat?
   b. Peter ist anderthalbmal so viele Runden gelaufen. Welche Strecke hat er Strecke gelaufen?

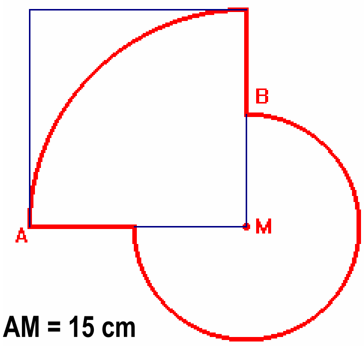
7. **Einem Quadrat mit der Seitenlänge 16cm wird ein Kreis eingeschrieben. Skizziere die Situation und berechne den Umfang und die Fläche des Kreises.**

8. **Aus einem Kreis (d = 15cm) wird ein Kreissektor herausgeschnitten, der gerade einen Sechstel des ganzen Kreises ausmacht. Berechne**
   a. **Die Fläche des Kreissektores**
   b. **Die Länge des Bogens**
   c. **Die Grösse des Zentriwinkels des herausgeschnittenen Sektors**

9. **Aus einem Kreis mit dem Durchmesser 123cm wird ein Kreissektor (Zentriwinkel α = 138°) herausgeschnitten. Berechne**
   a. **Die Fläche des Kreissektores**
   b. **Die Länge des Bogens**

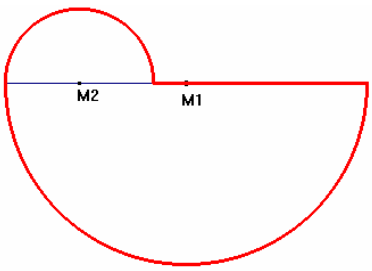
10. **Aus einem Kreis mit dem Durchmesser x wird ein Kreissektor (Zentriwinkel α = 170°) herausgeschnitten. Berechne**
    a. **Die Fläche des Kreissektores**
    b. **Die Länge des Bogens**

11. **Berechne den Umfang der fett markierten (roten) Figur**



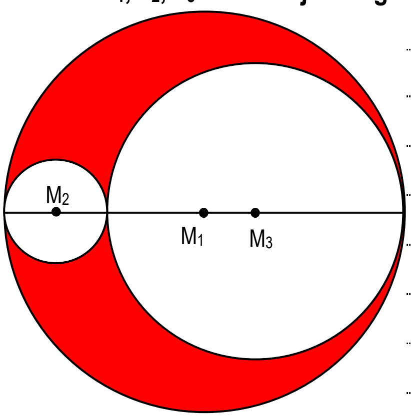
AM = 15 cm
BM = 6 cm

12. **Berechne den Umfang der fett markierten (roten) Figur (M_2 ist Mittelpunkt des Kreises k_2 mit Radius r_2; M_1 ist Mittelpunkt des Kreises k_1 mit Radius r_1)**

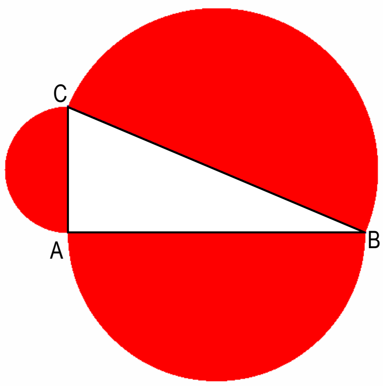


r_1 = 28 cm
r_2 = 6 cm

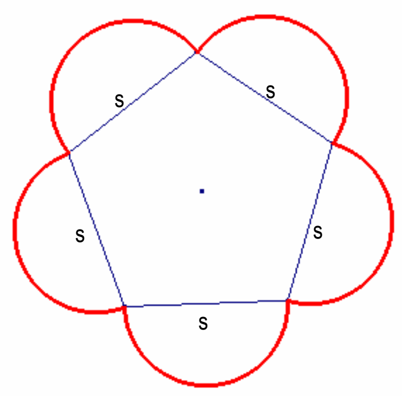
13. **Berechne den Umfang und die Fläche der markierten Figur (rot). (M_1, M_2 und M_3 sind die Kreismittelpunkte der Kreise k_1, k_2, k_3 mit dem jeweiligen Radius r_1 = 15cm, r_2= 3cm, r_3= 12cm.)**



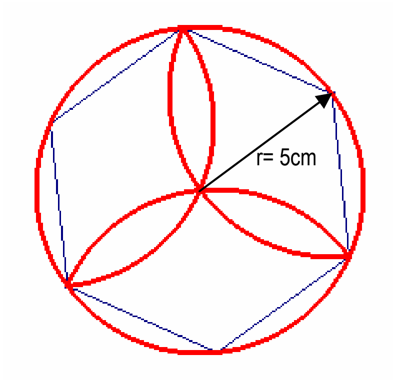
14. **Berechne die Fläche der markierten Figur (rot). (AB =10cm, AC = 6cm, BC= 8cm.)**



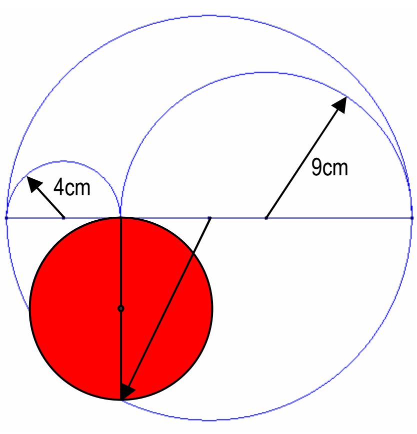
15. **Berechne den Umfang der von den Kreisbogen begrenzten Figur im regelmässigen Fünfeck (s = 12cm)**



16. **Berechne die Länge der rot markierten Strecke (die zu Grunde liegende Figur ist ein regelmässiges Sechseck)**



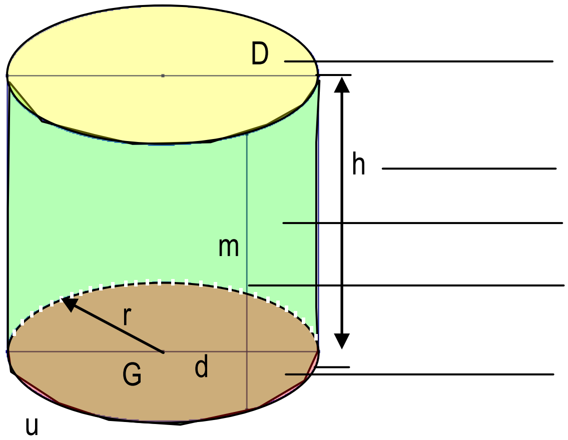
17. **Berechne die Fläche des rot markierten Kreises (auf eine Kommastelle genau.)**



2. Der gerade (senkrechte) Kreiszylinder

2.1 Definition und Volumen

Der Kreiszylinder ist ein Körper, dessen Grund- und Deckfläche jeweils ein gleich grosser Kreis ist. Ein Kreiszylinder hat die Form eines Rohres und findet z.B. im Motorenbau eine wichtige Anwendung.



Deckfläche D: zur Grundfläche kongruenter Kreis (im Raumbild eine Ellipse)

Zylinderhöhe (Höhe) h: Abstand von Grund- und Deckfläche

Mantel (Mantelfläche) M

Mantellinie m: Steht senkrecht auf Grund- und Deckfläche und ist gleich h

Grundfläche G: Kreis mit Durchmesser d, Radius r und dem Umfang u (im Raumbild eine Ellipse)

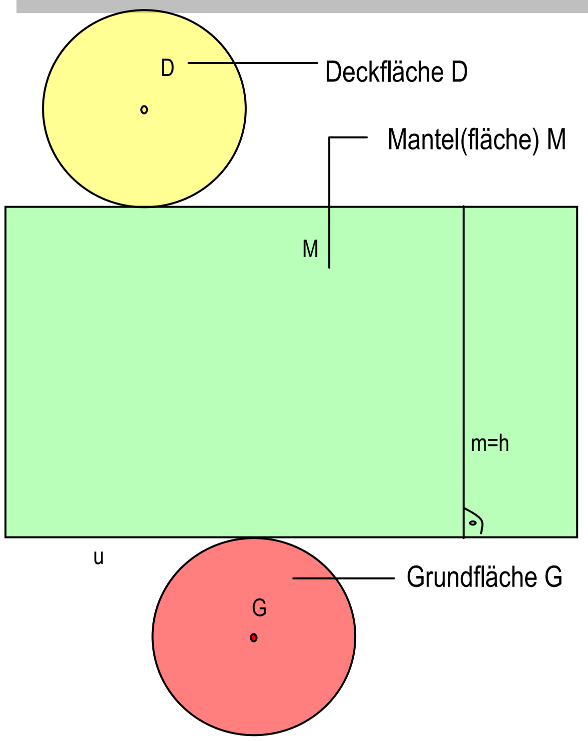
Der gerade Kreiszylinder ist eigentlich eine Art „senkrechtes Prisma“. Entsprechend kann auch das Volumen berechnet werden:

$$\mathbf{V_{Zylinder} = Grundfläche \bullet Höhe = G \bullet h = r^2 \pi \bullet h = h\, r^2 \pi}$$

2.2 Mantel- und Oberfläche des geraden Kreiszylinders:

Wie von jedem Körper, den wir bisher behandelt haben, ist auch vom geraden Kreiszylinder Oberfläche und Mantel berechenbar. Zudem kann man vom geraden Kreiszylinder ein Netz zeichnen, das ganz einfach dargestellt werden kann:

Das Netz besteht aus einem Rechteck und zwei kongruenten Kreisen. Die Länge der Mantellinie entspricht gerade der Zylinderhöhe h.



<u>Mantelfläche M:</u>

$$\mathbf{M_{Zylinder}} = \text{Umfang} \bullet \text{Höhe} = u \bullet h = 2\,\pi\, r \bullet h = \mathbf{2\,\pi\, h\, r}$$

<u>Oberfläche S:</u>

Oberfläche = Grundfläche + Deckfläche + Mantel
= $r^2\pi$ + $r^2\pi$ + $2\pi rh$

$$\mathbf{S_{Zylinder}} = 2\, r^2\pi + 2\,\pi rh = \mathbf{2\,\pi\, r\,(r + h)}$$

Aufgaben gerader Kreiszylinder:

1. Berechne die fehlenden Grössen im geraden Kreiszylinder:

	d	h	V
a)	25 cm	12 cm	
b)	24 cm		2214 cm^3
c)		56.5 cm	2123.2 cm^3
d)	23 cm	3 cm	
e)		18 cm	3211 cm^3
f)	2 x	24	

2. Berechne die fehlenden Grössen im geraden Kreiszylinder:

	d	h	M	S
a)	15 cm	22 cm		
b)	14 cm			2143 cm^2
c)		5 cm	321cm^2	
d)	23 cm		1525.5 cm^2	
e)			13584 cm^2	32111 cm^2

3. Ein grosser Kreiszylinder wird mit Wasser gefüllt. Dabei wissen wir, dass der Zylinder einen Umfang von 125 cm aufweist. Pro Sekunde fliessen 12 Liter Wasser in den Zylinder hinein. Bis er voll ist, dauert es genau 15 Minuten. Berechne die Höhe des geraden Kreiszylinders.

4. Eine Konservendose soll einen Inhalt von 345652 ml aufnehmen können. Wie viel Blech braucht man, wenn die Dose eine Höhe von 15.3 cm haben soll? (Arbeite mit einer Skizze)

5. Eine Betonröhre hat eine 5cm dicke Wand, hat einen Durchmesser (Aussenwände) von 120 cm und eine Höhe von 12m. Wie viele Liter Beton braucht man, um dieses Rohr herzustellen? (Arbeite mit einer Skizze)

6. Eine Dampfwalze muss erneuert werden. Die zylinderförmige Walze hat einen Durchmesser von 1.2 m und ist 2.5m lang. Berechne das Gewicht dieser Walze, wenn du weisst, dass 1 cm^3 Eisen genau 7.8 g schwer ist.